Aufgabenserie 2

Praktikum Zuverlässigkeit & Qualitätssicherung (Master)

B.Eng. René Schwarz

Hochschule Merseburg (FH)
Fachbereich Informatik- und Kommunikationssysteme

in Vertretung für Herrn Prof. Dr. rer. nat. habil. Eckhard Liebscher

29. April 2010

Belegthemen

Prüfungshinweis

Am Ende des Semesters ist ein ausgearbeiteter Beleg abzugeben (vgl. Modul „Computergestützte Datenanalyse“), der die folgenden Themen umfasst:

1. **Lebensdauerverteilungen**
   Berechnung von Wahrscheinlichkeiten, Berechnung der Parameter der Verteilung, Ausfallrate, Restnutzungsdauer
2. **Systeme**
   Verfügbarkeit, Lebensdauerverteilung, Wichtigkeit von Elementen
3. **Statistik von Lebensdauerverteilungen**
   Weibull-Verteilung, zensierte Stichproben
4. **Instandhaltung** (optimale Strategien)
5. **Statistische Qualitätssicherung in der Prozessüberwachung** (Kontrollkarten)
6. **Stichprobenverfahren zur Attributprüfung**
7. **Beschleunigte Lebensdauertests**

Aufgabenstellung

Aufgabe 1

Für die folgenden Systeme gebe man Formeln für die Systemfunktion $\varphi(\vec{z})$ und für die Momentanverfügbarkeit p des Systems in Abhängigkeit von den Verfügbarkeiten $p_1, p_2, \ldots$ der Elemente an. Verwenden Sie dabei verschiedene Methoden, sofern im konkreten Fall anwendbar:

- Darstellung als Parallel-/Seriensystem
- Pfadmethode
- pivotale Zerlegung

(Systeme (a) bis (e) siehe Aufgabenstellung)

Erinnerung I:
Zustandsvektor $\vec{z}$, Systemfunktion $\varphi(\vec{z})$

Zustandsvektor $\vec{z}$

$$\vec{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_i, \ldots, z_n)^{\mathrm{T}}, \qquad z_i = \begin{cases} 1 & \text{wenn Element } e_i \text{ funktionstüchtig} \\ 0 & \text{wenn Element } e_i \text{ ausgefallen} \end{cases}$$

Systemfunktion $\varphi(\vec{z})$

$$\varphi(\vec{z}) = \begin{cases} 1 & \text{wenn System funktionstüchtig} \\ 0 & \text{wenn System ausgefallen} \end{cases}$$

$$\text{mit } \vec{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)^{\mathrm{T}}$$

Erinnerung II:
Systemfunktionen $\varphi(\vec{z})$ und -verfügbarkeiten p von Serien- & Parallelsystemen

Seriensystem

$$\varphi(\vec{z}) = \prod_{i=1}^{n} z_i = z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n \qquad p = \mathrm{P}(z_1 \cap z_2 \cap \ldots \cap z_n)$$

$$= \underbrace{\mathrm{P}(z_1)}_{=p_1} \cdot \underbrace{\mathrm{P}(z_2)}_{=p_2} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\mathrm{P}(z_n)}_{=p_n} = \prod_{i=1}^{n} p_i$$

Parallelsystem

$$\varphi(\vec{z}) = \coprod_{i=1}^{n} z_i = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - z_i) \qquad p = \mathrm{P}(z_1 \cup z_2 \cup \ldots \cup z_n) = \coprod_{i=1}^{n} p_i$$

Es kann somit festgestellt werden, dass die Systemfunktion $\varphi(\vec{z})$ und die Systemverfügbarkeit p **syntaktisch** gleich sind (nicht aber inhaltlich!).

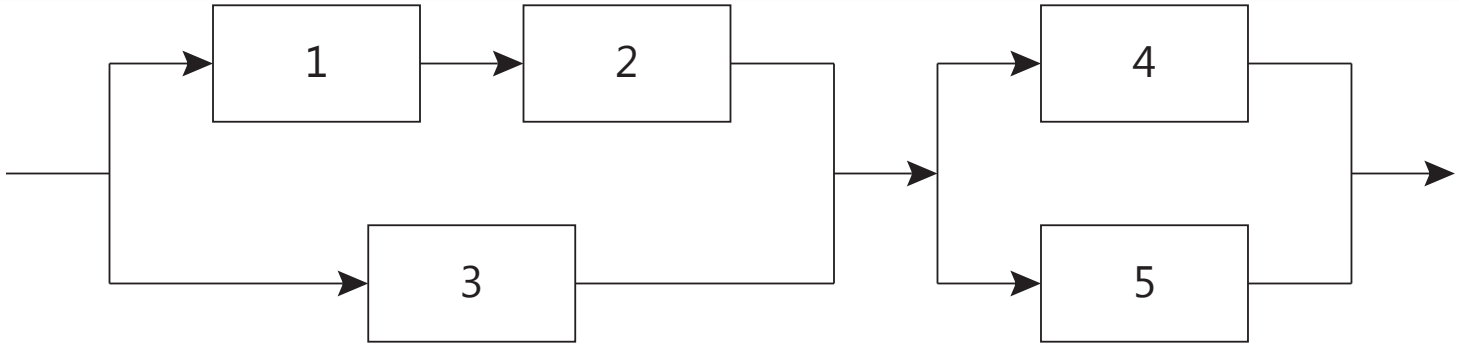

Abbildung: System (1a)

Praktikumsaufgabe

Bitte versuchen Sie diese Methode zur Herleitung der Systemfunktion $\varphi(\vec{z})$ an System (a) schriftlich. Im Nachgang wird eine einfache Möglichkeit der Herleitung in MATHEMATICA aufgezeigt.

manuelle Lösung Teilaufgabe (a)

$$
\begin{aligned}
\varphi(\vec{z}) &= G_1 \cdot G_2 \\
G_1 &= G_3 \parallel z_3 = 1 - ((1 - G_3)(1 - z_3)) = 1 - (1 - z_3 - G_3 + G_3 z_3) \\
&= z_3 + G_3 - G_3 z_3 \\
G_2 &= z_4 \parallel z_5 = 1 - ((1 - z_4)(1 - z_5)) = 1 - (1 - z_5 - z_4 + z_4 z_5) \\
&= z_4 + z_5 - z_4 z_5 \\
G_3 &= z_1 z_2
\end{aligned}
$$

Gleichungen ineinander einsetzen:

$$
\begin{aligned}
G_1 &= z_1 z_2 + z_3 - z_1 z_2 z_3 \\
\varphi(\vec{z}) &= (z_1 z_2 + z_3 - z_1 z_2 z_3)(z_4 + z_5 - z_4 z_5)
\end{aligned}
$$

Systemverfügbarkeit p:

$$
p = \varphi(\vec{p}) = (p_1 p_2 + p_3 - p_1 p_2 p_3)(p_4 + p_5 - p_4 p_5)
$$

■

Diskussion des Rechenweges

Die manuelle Rechnung ist

- schreibaufwendig,
- zeitraubend und
- fehleranfällig.

MATHEMATICA gestattet uns die Herleitung der Systemfunktion bei einfachen Systemen, die in Serien- und Parallelelemente aufgeteilt werden können, in eleganter Art und Weise. Wir bedienen uns dazu der Definition von **eigenen Funktionen** in MATHEMATICA.

Eigene Funktionen in Mathematica definieren

Mathematica-Code

```
In[1]:= MyFunc[a_ : 1, b_ : 50] := a + b;

In[2]:= c = MyFunc[20, 36]
Out[2]= 56

In[3]:= c = MyFunc[20]
Out[3]= 70

In[4]:= c = MyFunc[]
Out[4]= 51
```

Im obigen Code-Snippet wird die Funktion `MyFunc` mit ihren beiden Argumenten `a` und `b` definiert; die Funktion wird die Summe beider Argumente zurückgeben. Die Variablen sind vorbelegt, so dass eine Angabe nur bei Verschiedenheit von der Vorbelegung notwendig ist (analog zur Programmierung in C). D.h. diese spezielle Funktion kann mit beiden Argumenten, mit einem oder mit gar keinem Argument aufgerufen werden. **In letzteren Fällen werden die vordefinierten Werte verwendet.**

Vorbetrachtung zu unserer Funktionsdefinition I

Aus der vorherigen Folie ist nun bekannt, wie eigene Funktionen in MATHEMATICA definiert und wie deren Argumente vorbelegt werden können. Um diese Funktionalität für unser konkretes Problem nutzen zu können, betrachten wir zunächst noch einmal die **Systemfunktion $\varphi(\vec{z})$ für Seriensysteme**:

$$\varphi(\vec{z}) = \prod_{i=1}^{n} z_i = z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n$$

Für beispielsweise fünf Elemente $e_1, e_2, \ldots, e_5$ mit ihrem zugehörigen Zustandsvektor $(z_1, z_2, \ldots, z_5)^{\mathrm{T}}$ würde sich folgende Systemfunktion $\varphi(\vec{z})$ ergeben:

$$\varphi(\vec{z}) = \prod_{i=1}^{5} z_i = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 \cdot z_5$$

Betrachtet man z.B. nur drei Elemente, ist nun ersichtlich, dass man an Stelle von z_4 und z_5 eine 1 einsetzen kann, die dann als sog. neutrales Element die Gleichung unverändert lässt. Genau dies ist die Vorgehensweise für die Definition der Systemfunktion $\varphi(\vec{z})$ für Seriensysteme.

Vorbetrachtung zu unserer Funktionsdefinition II

Eine analoge Betrachtung führt man nun bei der **Systemfunktion** $\varphi(\vec{z})$ **für Parallelsysteme** durch:

$$\varphi(\vec{z}) = \coprod_{i=1}^{n} z_i = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - z_i) = 1 - ((1 - z_1)(1 - z_2) \cdot \ldots \cdot (1 - z_n))$$

Ohne weiteren Beweis ist ersichtlich, dass die 0 das neutrale Element der Gleichung für die Anzahl der betrachteten Elemente $< n$ ist.

Lösung in Mathematica I

Mathematica-Code

Parallelsystem:

```
In[1]:= par[a_, b_:0, c_:0, d_:0, e_:0, f_:0, g_:0, h_:0, i_:0, j_:0, k_:0, l_:0, m_:0, n_:0] :=
          1 - (1 - a) * (1 - b) * (1 - c) * (1 - d) * (1 - e) * (1 - f) * (1 - g) * (1 - h) * (1 - i) * (1 - j) *
            (1 - k) * (1 - l) * (1 - m) * (1 - n)
```

Seriensystem:

```
In[2]:= rei[a_, b_:1, c_:1, d_:1, e_:1, f_:1, g_:1, h_:1, i_:1, j_:1, k_:1, l_:1, m_:1, n_:1] :=
          a*b*c*d*e*f*g*h*i*j*k*l*m*n
```

Entsprechend der Vorbetrachtung wird die Systemfunktion $\varphi(\vec{z})$ für beide Systemarten in MATHEMATICA implementiert. Für jede Systemfunktion ist die Betrachtung von 14 Elementen möglich (es können natürlich auch mehr Argumente/Variablen definiert werden). Als Vorbelegung der Argumente wird jeweils das ermittelte neutrale Element verwendet.

Lösung in Mathematica II

Nun kann man die Systemfunktion $\varphi(\vec{z})$ sowie die Systemverfügbarkeit p, die analog zur Systemfunktion $\varphi(\vec{z})$ für beide Systemarten gebildet wird, ermitteln:

Mathematica-Code

```
In[3]:= system1a = rei[par[rei[z1, z2], z3], par[z4, z5]]

Out[3]= (1 - (1 - z1 z2) (1 - z3)) (1 - (1 - z4) (1 - z5))

In[4]:= (* Systemfunktion φ(z⃗)
           (vorher alle eventuell entstandenen Potenzen von zi entfernen) *)
        systemfunktion1a = Expand[system1a] /. zi_^_ → zi;
        systemfunktion1a = Factor[system1a]

Out[5]= (-z1 z2 - z3 + z1 z2 z3) (-z4 - z5 + z4 z5)

In[6]:= (* Systemverfügbarkeit p *)
        systemverfügbarkeit1a = systemfunktion1a /. zi_ → pi

Out[6]= (-p1 p2 - p3 + p1 p2 p3) (-p4 - p5 + p4 p5)
```

Praktikumsaufgabe

Ermitteln Sie nun die Systemfunktion $\varphi(\vec{z})$ und die -verfügbarkeit p eines weiteren Systems.

Achtung!
Nicht alle Systeme sind mit der Betrachtung als Serien- bzw. Parallelsysteme ohne Weiteres lösbar!

pivotale Zerlegung & Pfadmethode

Die beiden weiteren Methoden zur Analyse der Systeme (SHANNONscher Zerlegungssatz - pivotale Zerlegung und die Pfadmethode) werden im nächsten Praktikum von Herrn Prof. Liebscher selbst erläutert.

Aufgabenstellung

Aufgabe 2

Man leite die Formel für die Verteilung $F(t)$ der Lebensdauer der Systeme in Aufgabe (1a) und (1b) ab. $F_1(t), F_2(t), \ldots$ seien dabei die Verteilungsfunktionen der Lebensdauern der Elemente. Man gebe die Dichte $f(t)$ der Lebensdauer des Systems für den Fall an, dass die Lebensdauer aller Elemente exponentialverteilt mit dem gleichen Parameter ist.

Theorie

Zusammenhang zwischen $p(t)$, $F(t)$ und $S(t)$

$$p(t) = 1 - F(t) = S(t)$$

$p(t)$	Systemverfügbarkeit
$F(t)$	Lebensdauerverteilung
$S(t)$	Zuverlässigkeits- oder Überlebensfunktion (engl. *Survival Function*)

Die Systemverfügbarkeit $p(t)$ und die Überlebensfunktion $S(t)$ geben die **Wahrscheinlichkeit an, dass das System zum betrachteten Zeitpunkt noch funktioniert**. Die Lebensdauerverteilung $F(t)$ bestimmt die **Ausfallwahrscheinlichkeit des Systems zum Betrachtungszeitpunkt** t.

Lebensdauerverteilung der Exponentialverteilung, Dichtefunktion

$$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda): \; F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}, \qquad f(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(t)$$

Lösung für System (1a)

Aus Aufgabe (1a) ist die Systemverfügbarkeit p bekannt:

$$p = (p_1 p_2 + p_3 - p_1 p_2 p_3)(p_4 + p_5 - p_4 p_5)$$

Durch Anwendung des Zusammenhangs $p(t) = 1 - F(t)$ erhält man die Lebensdauerverteilung $F(t)$ in allgemeiner Form:

$$\begin{aligned} F(t) = 1 - ((1 - F_1(t))(1 - F_2(t)) + (1 - F_3(t)) - (1 - F_1(t))(1 - F_2(t)) \\ \cdot (1 - F_3(t)))((1 - F_4(t)) + (1 - F_5(t)) - (1 - F_4(t))(1 - F_5(t))) \end{aligned}$$

□

Laut Aufgabenstellung ist nun die Lebensdauer eines jeden Elementes exponentialverteilt:

$$X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda_i), \qquad F_i(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda_i t}$$

Des Weiteren lässt sich der Aufgabenstellung entnehmen, dass der Parameter λ_i für alle Elemente gleich ist:

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} : \lambda_i = \lambda \qquad \rightsquigarrow \qquad F_i(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

Wenn nun die $F_i(t)$ in die Gleichung der Lebensdauerverteilung $F(t)$ eingesetzt werden und man die erste Ableitung des entstandenen Termes bildet, so ergibt sich die gesuchte Dichte $f(t)$ der Lebensdauerverteilung.

■

Aufgabenstellung

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Ausfallrate $h(t)$ eines Systems mit zwei parallelen Elementen, deren Lebensdauer $\mathrm{Exp}(\lambda_1)$- bzw. $\mathrm{Exp}(\lambda_2)$-verteilt ist. Ermitteln Sie außerdem die mittlere Lebensdauer MTTF.

Theorie

Ausfallrate $h(t)$

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

Die Ausfallrate $h(t)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass ein **System zum Betrachtungszeitpunkt** t **bereits ausgefallen** ist.

Mittlere Lebensdauer MTTF

$$\text{MTTF} = E(X) = \int_0^\infty S(t)\mathrm{d}t = \int_0^\infty (1 - F(t))\mathrm{d}t$$

Aufgabenstellung

Aufgabe 4

Man analysiere die Lebensdauerverteilung eines Seriensystems von zwei Elementen, deren Lebensdauern Weibull-verteilt mit den Parametern $(3, \lambda)$ und $(4, \lambda)$ sind. Geben Sie die Verteilungsfunktion $F(t)$, die Dichte $f(t)$ und die Ausfallrate $h(t)$ an. Wie groß ist die mittlere Lebensdauer MTTF für $\lambda = 1$?

Theorie

Weibull-Verteilung

$$X \sim \text{Weibull}(\lambda, \beta): \quad F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t^{\beta}}, \quad \lambda = T^{-\beta}$$

β	Formparameter
λ	Zeitstauchung/-streckung
T	charakteristische Lebensdauer

Aufgabenstellung

Aufgabe 5

Wir betrachten ein Parallelsystem, dessen Lebensdauern seiner drei Elemente Weibull-verteilt mit den Parametern $(2, 1)$, $(3, 1)$ und $(4, 1)$ sind, wobei der erste Parameter der Formparameter β ist. Ermitteln Sie die Dichte $f(t)$ und die Ausfallrate $h(t)$ sowie die mittlere Lebensdauer MTTF.

Aufgabenstellung

Aufgabe 6

Gegeben ist ein 5-aus-n-System mit Elementen, die eine Verfügbarkeit von 0.98 besitzen. Wie groß muss n gewählt werden, dass die Systemverfügbarkeit 0.99999999 beträgt?

Übersicht der Formeln für Serien- und Parallelsysteme

	Seriensysteme	**Parallelsysteme**
Systemfunktion $\varphi(\vec{z})$	$\varphi(\vec{z}) = \prod_{i=1}^{n} z_i$	$\varphi(\vec{z}) = \coprod_{i=1}^{n} z_i = 1$
Systemverfügbarkeit p	$p = \prod_{i=1}^{n} p_i$	$p = \coprod_{i=1}^{n} p_i$
Überlebensfunktion $S(t)$	$S(t) = \prod_{i=1}^{n} S_i(t)$	$S(t) = \coprod_{i=1}^{n} S_i(t)$
Lebensdauerverteilung $F(t)$	$F(t) = \coprod_{i=1}^{n} F_i(t)$	$F(t) = \prod_{i=1}^{n} F_i(t)$
Ausfallrate $h(t)$	$h(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i(t)$	

$$\coprod_{i=1}^{n} x_i = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i)$$

Allgemeines Lösungsschema

1. Systemfunktion $\varphi(\vec{z})$ ermitteln, ggf. Potenzen eliminieren ($z_i^k = z_i$)
2. Systemverfügbarkeit p aus Systemfunktion $\varphi(\vec{z})$ ableiten: alle z_i durch p_i ersetzen
3. Lebensdauerverteilung $F(t)$ allgemein ermitteln: alle p_i durch $1 - F_i(t)$ ersetzen
4. Lebensdauerverteilung $F(t)$ speziell ermitteln: die einzelnen $F_i(t)$ durch die entsprechenden Verteilungsfunktionen der Lebensdauern der einzelnen Elemente ersetzen
5. Dichte $f(t)$ der Lebensdauerverteilung berechnen: $F(t)$ ableiten
6. Ausfallrate $h(t)$ berechnen: $h(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$
7. mittlere Lebensdauer MTTF bestimmen: $\text{MTTF} = \int_0^\infty (1 - F(t))\mathrm{d}t$

Urheberrechtshinweis

Dieses Werk bzw. sein Inhalt ist unter der Creative Commons-Lizenz „Namensnennung-Keine kommerzielle Nutzung-Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland“ (CC-BY-NC-SA) lizensiert, sofern nicht anderweitig ausgewiesen (bitte beachten Sie insbesondere auch Fußnoten, Abbildungs- und Quellenverzeichnisse u.ä.). Es ist ausdrücklich vom Autor erwünscht, dass Sie den Inhalt unter Beachtung der Lizenzbedingungen weiterverbreiten, weiterverwenden, vervielfältigen und verändern.
Das Logo von René Schwarz ist entgegen dieser Bestimmungen urheberrechtlich geschützt. Es wird nicht gestattet, das Logo oder Elemente davon weiterzuverwenden.

Lizenzinformationen (Bedingungen): http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/
Informationen zu Creative Commons: http://creativecommons.org/